

線形演算要素を用いた正変量任意確率分布曲線 の Analogue Simulation Technique

太 田 光 雄^{*}・山 口 静 馬^{**}

Analogue Simulation Technique for Arbitrary Distribution Curves with Probability Variables Defined over Positive Region by the Method of Transient Response

MITSUO OHTA, SHIZUMA YAMAGUCHI

(Received Oct. 15, 1968)

We are well aware of the fact that the probability density function can be uniquely determined by the moment generating function in the form of Laplace transform following the wellknown inversion formula by Lévy. This property, we can consider, corresponds to the relation between the impulse response and the transfer function in the field of linear control theory.

In this paper, several practical methods of recording directly the probability density and cumulative probability distribution curves for the physical quantities fluctuating only in positive region are introduced by simulating the corresponding moment generating function on the analogue computer in the form of the transfer function.

The experimental technique described in this paper are useful in the fields of statistical engineering, since the probability variables defined over positive region are fundamental quantities.

1 緒 言

一般に、確率分布関数とその Laplace 変換である一種の積率母関数によって一意に与えられることは、数理統計学における Lévy の反転公式¹⁾に照して公知の事実である。この関係を、自動制御論における Impulse 応答とその Laplace 変換である伝達関数との関係に対応させて考察するならば、種々の与えられた積率母関数を、伝達関数の形で Analogue 電子計算機上に実際に Simulate することができ、これにより統計工学の分野でしばしばあらわれる各種の正変量確率密度分布関数や累積確率分布関数を、それぞれ、そ

の伝達関数の Impulse 応答波, Indicial 応答波として直接記録紙上にえがきだすことができるはずである。ただし、確率や確率密度の値は計算機上では電圧 Scale で、確率変量は時間 Scale で模擬されよう。本論文において、特に正領域内で揺らぐ不規則変動波の確率分布のみに着目したのは、Simulation Technique の物理的実現可能条件である因果律に照らして、実際の確率変量を計算機上で模擬した時間軸の領域が半無限区間 $[0, \infty)$ 内に限定されるからである。

この手法はまた、積率母関数表示が複雑なために、裏領域における積率母関数から表領域における累積確率分布表示や確率密度分布表示を理論的に算出するこ

*教授 **助手

とが困難な場合においても、この2つの分布曲線を同時に直接えがきだすことができる利点ももち合わせている。しかし本論文では、Analogue Simulationにより得られた正変量確率分布表示の工学的な重要性以外に、このSimulation Techniqueそのものの正当性をも実験的に確認するため、Simulationの適用対象としては、すでにわれわれや他の人々によって裏領域の積率母関数から理論的に陽に算出することのできた表領域の正領域変動分布のうち、特に工学的な重要性のあるもののみを具体例にとった。

一般に、正領域内でのみ変動する任意不規則波の確率分布が、ちょうど周期性ある任意波形を、正弦波、余弦波といった一定の要素的Patternで階級別(周波数別)に攻撃するFourier調和分析と同じように、Laguerre陪関数(Laguerre filter⁶⁾の拡張・ Γ 型確率関数といった一定の要素的Patternで階級別に(すなわちその母数を階級別に逐次変更しつつ積み上げて)攻める直交展開型ならびに非直交展開型分布表示で分析できることはすでに発表している。ここに各不規則現象に特有な統計的個性は各展開係数のうちに反映されよう。

2 理論的考察

正領域内でのみ揺らぐ任意不規則変動現象の確率分布曲線は、その確率変量を計算機上の時間軸 t として観測するのならば、負の時間領域では零応答をもち正の時間領域では与えられた確率分布関数 $P(t)$ に対応した電圧波形をもつとして模擬される。このような出力応答波形をImpulse応答波形としてもつような制御要素を計算機上にSimulateして物理的に実現することは、因果律に照らして原則的に可能なのである。具体的には、この正領域内任意変動分布を計算機上で模擬するのに必要な2つの指針が考えられ、一般的には、緒言でもふれた直交級数展開型と非直交級数展開型分布表示に基づくSimulation Techniqueを与えることができる。

各種級数展開型確率密度分布表示のうちでも、特に統計的正規直交関数展開表示を用いるときは、各展開係数に対応した計算機上のPotentiometerの調整を、他のPotentiometerに何等干渉効果を受けることなく、個々に独立に行なうことができ、しかも無限級数での展開表示を任意の有限項で打ち切っても、なお確率規格化条件： $\int_0^\infty p(t)dt=1$ を充すといった長所をもっている。しかし、他面、このような級数は実際の立場では一般に条件収斂、特に交代級数の形であらわ

れ、有限項で打ち切った場合確率表現として部分的に負値を示すことしばしばであり、工学的要求から各展開係数のもつ物理的意義を問題とせず、結果の分布形状を速かに救いたい時は、収斂の速さにおいていくらか劣るといった短所をももち合わせている。

一般に、現象の不規則性に関する多様な諸側面のうち、いかなる情報にどの程度の焦点をおくかによっては、各種展開型統計処理方法のうちでも、正規直交展開といった正攻法を常にとる必要はなく、時には直交性を犠牲にしても要求に沿う他の側面(たとえば収斂の速さ)を重視する別な非直交展開処理方法も考えられ、有効性に価値をおく工学的側面においては、実際的手法といえよう。たとえば、非心chi-square分布⁴⁾は、各展開項が母数の階級的に異なる Γ -分布型で与えられた、やはり級数展開表示の形で定義されているが、各展開項間にはもはや直交性はなく、その代り、各展開係数はすべて正値を示し、収斂が極めて速く、したがって、非心chi-square分布としての結果的な全分布形状を知るには、実際的に価値ある表現方法である。この場合、計算機上では展開係数に相当した各Potentiometerを互いに独立に調整できなくなる不便もあるが、その代り、Potentiometerの全個数が少なくすむ簡便さも生まれよう。

2・1 正変量確率分布の直交展開による Analogue Simulation Technique

[I] 一般的考察

われわれは、すでに正領域内でのみ揺らぐ任意不規則変動波の直交展開型確率密度分布 $P(t)$ の一般表示として、つぎの統計的Laguerre直交展開型表示：

$$\left\{ \begin{array}{l} P(t) = \frac{A^{-m}}{\Gamma(m)} t^{m-1} e^{-\frac{t}{A}} \left\{ 1 + \sum_{k=3}^{\infty} A_k \frac{k! \Gamma(m)}{\Gamma(k+m)} \right. \\ \quad \cdot L_k^{(m-1)}\left(\frac{t}{A}\right) \Big\} \quad \dots\dots\dots(1) \\ \text{ただし,} \\ \quad A_k = \langle L_k^{(m-1)}\left(\frac{t}{A}\right) \rangle, \quad m = \frac{\langle t \rangle^2}{\sigma_t^2}, \quad A = \frac{\langle t \rangle}{m} \end{array} \right.$$

を導いており⁷⁾、Analogue Simulationを行なう上に直接必要な量は、確率密度表示の方よりは計算機上で伝達関数とし実際に模擬されるはずの積率母関数 $m(s) (= \langle \exp(-ts) \rangle = \int_0^\infty \exp(-ts) P(t) dt)$ の方である。したがって(1)式の $m(s)$ を具体的に算出する。いまCarson積分⁸⁾：

$$\frac{1}{n!} \frac{1}{P^{n+\alpha+1}} (P-1)^n = \int_0^\infty e^{-Pz} \frac{z^\alpha}{\Gamma(n+\alpha+1)} \cdot L_n^{(\alpha)}(z) dz \quad \dots\dots\dots(2)$$

に置換：

$$P = 1 + As, \alpha + 1 = m, z = \frac{t}{A} \quad \dots\dots\dots(3)$$

を施して得られた積分関係を(1)式に適用して

$$m(s) = \frac{1}{(1 + As)^m} \left\{ 1 + \sum_{k=2}^{\infty} A_k \left(\frac{As}{1 + As} \right)^k \right\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

の積率母関数表示がえられる。この表示のうち、各展開係数 A_k は、計算機上では各 Potentiometer によって、あらかじめ平均値、分散、3次積率、……などの各積率値から所定の値に設定されるか、または実際の得られた真の $P(t)$ と(1)式を有限項で打ち切った近似表現 $P(t)$ との差を、ある誤差評価基準のもとに最小にすべく、その Potentiometer によって調整されるべき性質のものである（この場合は $k = 1, 2$ の展開項もあらかじめ含めておく）。したがってわれわれは(4)式右辺の各項で、まず

$$\frac{1}{(1 + As)^m} \left(\frac{As}{1 + As} \right)^k \quad (k = 0, 3, 4, 5, \dots) \quad \dots\dots\dots(5)$$

なる量を、 k の異なる各場合について伝達関数として計算機上に Simulate し、さらにそれらを加算器で加え合わせねばなるまい。(5)式のうち $(As/(1 + As))^k$ の部分は公知のごとく Fig. 1 の要素を k 個連続すれば

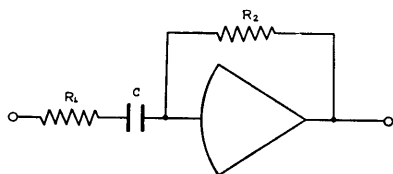


Fig. 1 Analogue simulation system of transfer function $As/(1 + As)$. $CR_1 = A$, $CR_2 = A$

よく^{2),5)}、また $1/(1 + As)^m$ の部分についてはつぎの2つの場合が考えられよう。

(A) m が正整数の場合は、Fig. 2 の要素を m 個連続することによって容易に Simulate できる。

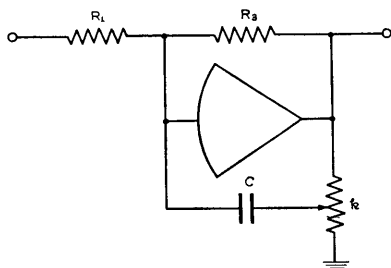


Fig. 2 Analogue simulation system of transfer function $1/(1 + As)$. $R_2/R_1 = 1$, $kCR_3 = A$

(B) m が正整数でない一般の場合は、 $m = n(0$ を含む正整数) $+\delta$ (>1 , 正整数でない) とおき、 n については (A) の方法を適用し、残る $1/(1 + As)^\delta$ については、

$$\frac{1}{(1 + As)^\delta} \frac{1}{1 + \delta As + \frac{\delta(\delta-1)}{2!} (As)^2} \quad \dots\dots\dots(6)$$

なる関係から Fig. 3 の帰還接続型演算回路³⁾ (右辺分母の2次式における各係数がすべて正值をとる点に留意) を用いることが考えられる。Lévy の反転公式に

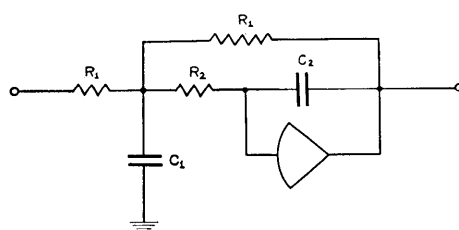


Fig. 3 Analogue simulation system of transfer function $1/[1 + \delta As + \delta(\delta-1)/2! \cdot (As)^2]$. $R_1 R_2 C_1 C_2 = \delta(\delta-1) A^2/2!$, $(2R_2 + R_1)C_2 = \delta A$

よれば、表領域の確率分布を一意に決定する裏領域での積率母関数 $m(s)$ に関する s の定義域は、0 を含む任意微小区間 $[-\epsilon, \epsilon']$ でよく、このことは Simulation における(6)式の近似の有効性を保証しており、Analogue 計算機における時間 Scale 換算の手法を加味するならば、ますます効果的であろう。理論的に典型的な形として現われる正領域分布においては、 $m = N/2$ ($N =$ 正整数) の母数をとる場合が多い。^{4),7)}

〔Ⅱ〕 自乗則非線形系の不規則応答

一般に Analogue Simulation Technique の正当性を実験的に確認するには、〔Ⅰ〕の一般的考察における各展開係数 A_k があらかじめ算出されている理論的分布表示をその適用対象とするのが直接的であり、ここでは、特に信号解析の上で重要な意味をもつ場合として、任意 Spectrum をもつ Gauss 型定常不規則入力を Memory のある自乗則非線形系に加えた場合に注目する。この場合の出力動揺確率密度分布が、その積率母関数表示とともに、つぎのごとく与えられることを発表している⁹⁾。

$$m(s) = \prod_{i=1}^N (1 + 2\lambda_i s)^{-\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$P(t) = \frac{A^{-m}}{\Gamma(m)} t^{m-1} e^{-\frac{t}{A}} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{m(m+1)(m+2)A^3} L_3^{(m-1)}\left(\frac{t}{A}\right) - \frac{\beta}{m(m+1)(m+2)(m+3)A^4} L_4^{(m-1)}\left(\frac{t}{A}\right) - \dots \right\} \quad \dots\dots\dots(8)$$

ただし、 λ_i は入力統計的性質（自己相関関数）と自乗則変換後の後置渡波特性（衝撃応答）の両者を対称核のうちに反映させた異常形 Fredholm 積分方程式の固有値であり、 N はその有効な個数で、 m, α, β はすべてこの λ_i から算出される特性 Parameter である⁹⁾。 $m(s)$ が (7) 式のごとく閉じた陽表示で与えられても、その表領域である $P(t)$ の理論的表示が閉じた陽表現をとることは一般に困難であるが、もちろん、この場合においても Analogue Simulation の結果による分布曲線は記録紙上で直接 (Analogue 計算機の精度内で) 正確にえがきだされる。(8) 式の一般展開表示は λ_i の特殊な場合に対しては、閉じた陽表現の形にまとめることも可能である。また、(7) 式は因子を 2 個ずつ組み合わせ、それぞれの組を、

$$\frac{1}{(1+2\lambda_i s)(1+2\lambda_j s)} = \frac{1}{1+2(\lambda_i+\lambda_j)s+4\lambda_i\lambda_j s^2} \quad \dots\dots\dots(9)$$

の形の伝達関数にまとめて、Fig. 3 の手法を正確に適用することも可能である。

以下、 λ_i と N を種々変えた特別な場合について $m(s)$ と $P(t)$ の表示を列記する⁹⁾。

Case I $N=1, \lambda_1$ (任意) :

$$m(s) = \frac{1}{\sqrt{1+2\lambda_1 s}}, \quad P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_1 t}} e^{-\frac{t}{2\lambda_1}} \quad \dots\dots\dots(10)$$

Case II $N=2, \lambda_1, \lambda_2$ (任意) :

$$m(s) = \frac{1}{\sqrt{(1+2\lambda_1 s)(1+2\lambda_2 s)}}, \quad P(t) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} e^{-\frac{t}{4}(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2})} I_0\left\{\frac{t}{4}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\right\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

Case III $N=N, \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_N=1$:

$$\begin{cases} m(s) = \frac{1}{(1+2s)^{N/2}} \\ P(t) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} \quad (\text{自由度 } N \text{ の chi-square 分布}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(12)$$

Case IV $N=N, \lambda_1=\lambda_2=\lambda_1', \lambda_3=\lambda_4=\lambda_2', \dots$:

$$\begin{cases} m(s) = \prod_{i=1}^{N/2} \frac{1}{1+2\lambda_i' s} \\ P(t) = \text{閉じた陽表現不能} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(13)$$

2・2 正変量確率分布の非直交展開による Analogue Simulation Technique

〔I〕一般的考察

正領域のみで揺らぐ任意不規則現象の確率密度分布が、直交性を犠牲にする代り、一定の Γ -分布型 Pattern の加法的集合（ただし、各展開項に位置する Γ -分布の母数は階級的に異なる）で、つぎのごとく展開表示されることはすでに発表している¹⁰⁾。

$$\begin{cases} P(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Gamma(\nu+m) A^{\nu+m} C_{\nu} P_{\Gamma}(t; A, \nu+m) \\ \text{ただし} \\ P_{\Gamma}(t; A, \nu+m) = \frac{1}{\Gamma(\nu+m) A^{m+\nu}} t^{m+\nu-1} e^{-\frac{t}{A}} (\Gamma\text{-分布}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここに、各展開係数 C_{ν} は $P(t)$ の分布形状に関する性質から求まる定数で、もちろん §2.1 における A_k と同様、真の $P(t)$ と近似 $P(t)$ との差を、ある誤差評価基準のもとに最小にすべく、各 Potentiometer の調整によって算出することもできる。(14) 式の積率母関数は容易に、

$$m(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+\nu) A m^{\nu}}{(1+As)^{m+\nu}} \cdot C_{\nu} \quad \dots\dots\dots(15)$$

のごとく導かれ、Fig. 2 と Fig. 3 の Simulation Technique はそのまま、この場合にも適用できること明らかである。

〔Ⅱ〕 規則信号相加の白色雑音に対する自乗平均回路の出力応答

規則信号成分(実効値 $\sqrt{E_0}$)を含む白色雑音を自乗平均回路に加えた場合の出力動揺確率密度分布が、その積率母関数表示とともに、

$$m(s) = \frac{1}{(1+As)^m} \exp\left(\frac{E_0 s}{1+As}\right) = e^{-\varepsilon} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{\nu}}{\nu! (1+As)^{m+\nu}} \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$P(t) = \frac{1}{A} e^{-\frac{1}{A}(E_0+t)} \left(\sqrt{\frac{t}{E_0}}\right)^{m-1} I_{m-1}\left(\frac{2}{A}\sqrt{E_0 t}\right) = e^{-\varepsilon} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{\nu}}{\nu!} P_r(t; A, m+\nu) \quad \dots\dots\dots(17)$$

ただし、 $\varepsilon = E_0/A$

のごとく、Bessel 分布(または自由度 2m, 偏心率 ε の非心 chi-square 分布⁴⁾)で与えられることをすでに発表しており^{7),8)}、言うまでもなく、(16) 式は (15) 式の、(17) 式は (14) 式の Special Case になっている。一般式 (14) 式における各展開係数 C_{ν} は、この場合すべて正値を示しており、この展開表示の収束の速さが直察されよう。

3 実験的考察

確率分布関数とその積率母関数によって一意に決定されるとはいっても、その積率母関数を伝達関数とみて Analogue 計算機上に Simulate する実際的方法には、§2 においても一部ふれたごとく、もちろん種々のやり方が考えられる^{2),5)}。Analogue Simulation の適用対象としては、信号変換において重要な位置を占める具体例にまず注目し、この具体例として、直交展開に基づく手法に §2・1〔Ⅱ〕の場合を、非直交展開に基づく手法に §2・2〔Ⅱ〕の場合を、特に採り上げた。

3・1 直交展開に基づく Analogue Simulation

(A) §2・1〔Ⅱ〕CaseⅢ(N=3) に対する Analogue Simulation :

N が偶数値をとる場合は CaseⅣ に含まれるから、ここでは N が奇数値の場合について実験を行なった。積率母関数 (12) 式の分母を、§2・1〔Ⅰ〕(B) の手法のもと、二項定理によって s の 2 次式で近似した場合の帰還型計算機接続図を Fig. 4 に示した。(ここでは

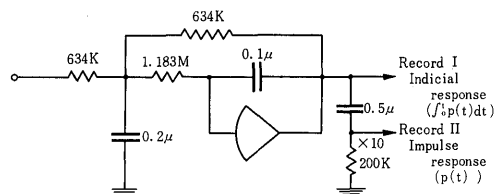


Fig. 4 Analogue simulation system of Eq.(12).

$s \rightarrow 0.1s'$, したがって $t \rightarrow 10t'$ なる Scale 換算を用いている)。実験結果は Fig 5 で理論曲線とともに示されている。

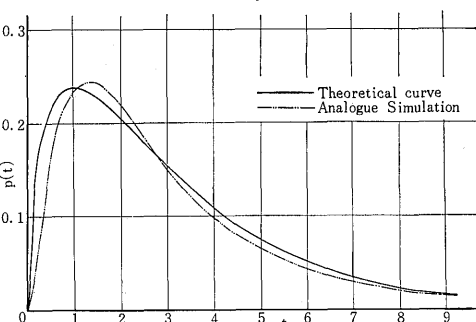
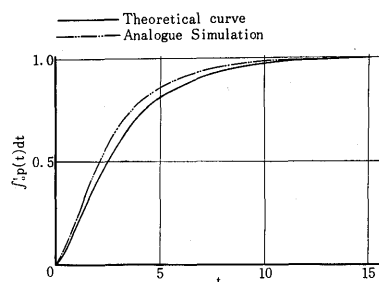


Fig. 5 Comparison between experimental and theoretical curves for Eq. (12).

(B) §2・1〔Ⅱ〕CaseⅣ($\lambda'_1=0.200, \lambda'_2=0.175, \lambda'_3=0.150, \lambda'_4=0.125, \lambda'_5=0.100, \lambda'_6=0.075, \lambda'_7=0.050, \lambda'_8=0.025$) に対する Analogue Simulation :

Fig. 6 はこれに対する計算機接続図で、各 λ'_i の値の変更は各 Potentiometer の調節によりなされる。N 値を種々変えた場合、表領域で対応する各確率分布形状がいかに変化していくかを理論的に陽表示することは全く困難であるが、この Analogue Simulation Technique によれば分布曲線の N による形状変化模様を、容易に直接記録紙上でみることができる。この様子を示したのが、Fig. 7 である。N 値が大になると

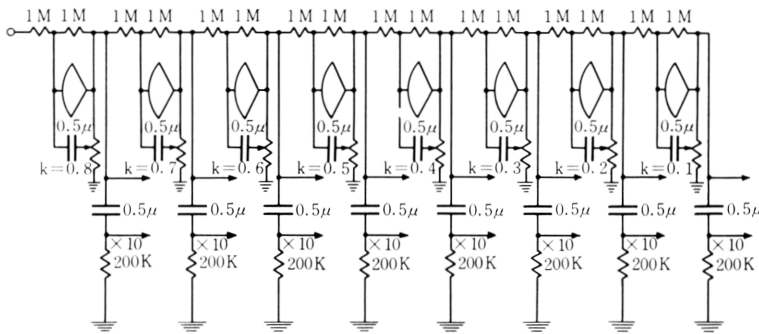


Fig. 6 Analogue simulation system of Eq. (13).

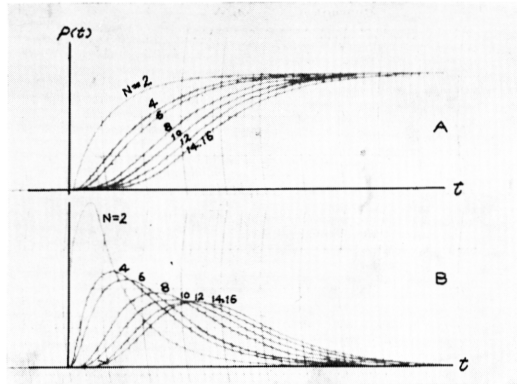
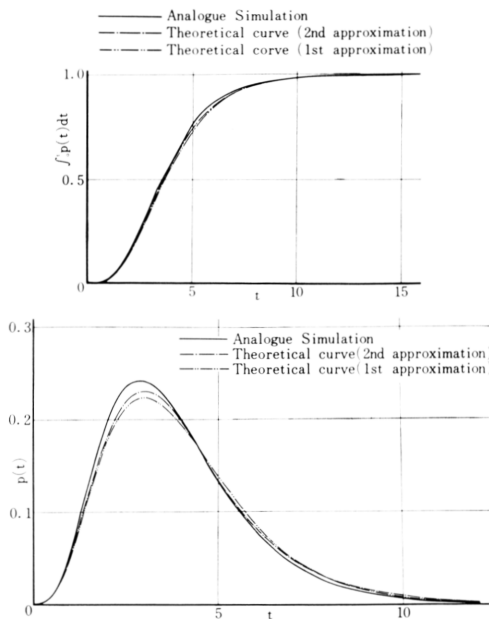
Fig. 7 Effect of freedom N and parameters λ_i on the probability distribution in the case IV. A, Cumulative distribution curves, B, Distribution density curves.

Fig. 8 Comparison between experimental and theoretical curves for Eq. (13).

もに確率分布は Gauss 分布に漸近していくことがわかる。さらに理論的分布曲線との一致度をみるため、 $N=8$ と固定し、実験結果と理論曲線との比較を行なったのが Fig. 8 である。統計的 Laguerre 直交展開による理論的確率密度分布表示(8)式において、初項より逐次展開項を付加して理論的に算出した分布

が、Analogue Simulation によって得られた実験的確率分布曲線に漸近していく傾向にあることがうかがわれる。

3・2 非直交展開に基づく Analogue Simulation

§2・2 [II] ($\epsilon=1/2$, $A=2.0$, $m=2$) に対する Analogue Simulation :

計算機接続図を Fig. 9 に示し、実験結果と理論曲線

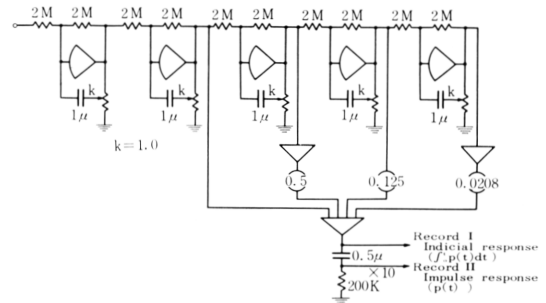


Fig. 9 Analogue simulation system of Eq. (16).

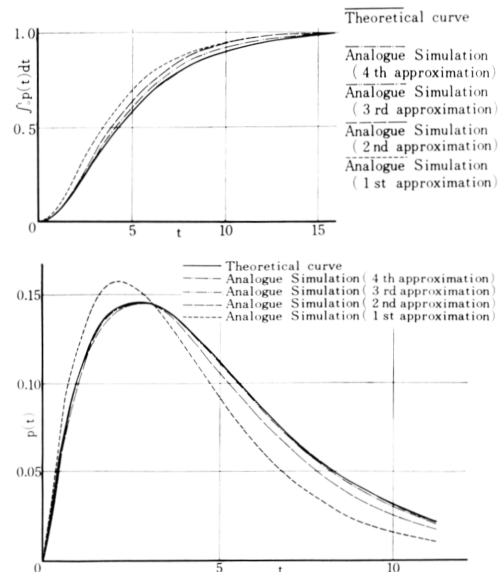


Fig. 10 Comparison between experimental and theoretical curves for Eq. (16).

との比較を行なったのが Fig. 10 である。展開表示 (16) 式の補正項に対応した Analogue Simulation の回路部分を Fig. 9 で逐次付加するにしたがい、理論的に算出した Bessel 分布曲線に漸近していくことがわかる。

4 結 言

本論文は、正領域内でのみ揺らぐ任意のあらゆる不規則変動波にも対処できることから工学的に応用範囲の広いものであり、さらに、表領域における累積確率分布表示や確率密度分布表示が、裏領域における積率母関数から理論的に陽に導出できない場合においても、この研究における Analogue Simulation Technique を用いて上の 2 つの分布曲線を同時にしかも直接えがきだすことができる。本報告においては、実験の部は積率母関数が既知(ただし λ_i は任意)の場合のみについて Analogue Simulation を行なったのであるが、統計的 Laguerre 直交展開 (1) 式ならびに Γ -分布型展開構成 (14) 式の理論的指針にしたがえば、いかなる不規則変動の確率分布に対しても(それがたとえ数学的に関数表示できなくても)ただ一つの Analogue Simulation System でもって前以て組んでおくことができ、各不規則現象における特殊な個々の統計的性質は、回路網に内在する各 Potentiometer を調節するのみでよいといった重要な工学的価値をもっている。一般に、正領域内の畳み込み積分で与えられるような確率分布問題に対しても、本論文における Analogue Simulation Technique がそのまま適用できるこというまでもない。

なお、Analogue Simulation Technique の適用対象として選んだ各具体例における分布曲線は、いうまでもなく、雑音解析の分野で工学的に重要な意味をもっ

ている。

謝 辞

日頃御教示を惜しまれぬ京大・理・物理教室の高橋勲名誉教授に感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) S.S. Wilks : Mathematical Statistics, Princeton University Press Princeton, New Jersey (1950).
- 2) Albert S. Jackson : Analog Computation, Mc Graw-Hill Book Company, INC. New York, Toronto London (1950).
- 3) Stanley Fifer : Analogue Computation, vol. II, Mc Graw-Hill Book Company, INC. New York, Toronto London (1961).
- 4) 北川 : 実験計画法講義 I, 基礎編 (1), 培風館 (1961).
- 5) 山下 : 電子計算機, アナログ計算機編, オーム社 (1962).
- 6) Eli Mishkin & Ludwig Braun, Jr : Adaptive Control Systems, Mc Graw-Hill Book Company, INC. New York, Toronto London (1961).
(丸茂, 中野, 富田訳 : 適応制御系, コロナ社 (1963))
- 7) M. Ota & M. Nakagami : On the General Energy Distribution of the Brownian Motion: Some Trials of Spatializing the Random Phenomena According to Bergson's View of Science, Proceedings of the Seventh Japan National Congress for Applied Mechanics, 317/322 (1957).
- 8) 太田 : 規則信号成分を含む定常不規則入力 of 自乗平均回路に対する Response, 計測と制御 3, 8, 573/589 (1964).
- 9) 太田 : 自乗則非線形系の任意スペクトラム不規則応答解析, 応用物理, 35, 11, 811/824 (1966).
- 10) 太田 : 正領域任意不規則信号波の確率密度表示に関する Γ -分布型展開構成法, 福井大工報 14, 2, (1966).

(昭和43年10月15日 受理)